Ответы и решения задач «зелёного» уровня сложности MathCat

Задача 1. (5 баллов) Даша и Маша играли в «крестики-нолики» на доске 3×3. Кто играет крестиками, а кто ноликами, сначала определили жребием, а потом менялись. Маша выиграла 3 партии, а Даша – 4. На рисунке приведены окончания партий в том порядке, как они игрались. Определите, сколько партий выиграла Маша ноликами: (См. рис. 1)

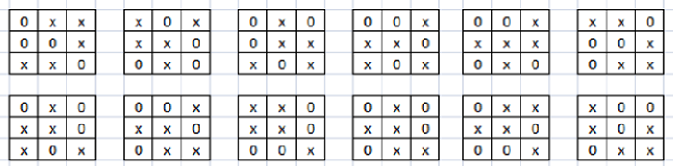


Рисунок 1

Ответ: 1

Решение. Пусть в первой партии одна девочка играла крестиками, а вторая ноликами. Тогда во второй - первая играла ноликами, а вторая крестиками. Запишем, кто как играл:

I X 0 X 0 **X** **0** X 0 **X** 0 X **0**
II **0** X 0 **X** 0 X 0 X 0 **X** 0 X

Жирным шрифтом выделено, кто выиграл в этой партии. Откуда видно, что одна выиграла 4 партии (значит, это Даша), а другая - 3 партии (значит, это Маша). Откуда легко видеть, что, Маша выиграла ноликами одну партию.

Задача 2. (7 баллов) Ваня и Даня сыграли в шахматы 25 партий. Кто играет белыми, первый раз определяли жребием, а далее менялись цветом. Оказалось, что каждый выиграл одинаковое число партий. Причем каждый выигрывал только белыми и не было двух результативных партий подряд. Какое минимальное количество ничьих было?

Ответ: 13 ничьих

Решение: Поскольку результативные партии не могут идти подряд, для их максимального количества они должны идти через одну. То есть больше 13 результативных партий быть не могло. А поскольку каждый выиграл одинаковое количество, то всего результативных не более 12.
Пример на 12 легко строится:

В - В - В - В - В - В - - Д - Д - Д - Д - Д - Д -

Задача 3. (10 баллов) На клетчатой доске две клетки выкрашены в серый цвет так, как на рисунке. Сколько существует прямоугольников со сторонами по линиям сетки, содержащих обе эти клетки? На рисунке приведен пример такого прямоугольника.(См. рис. 2)

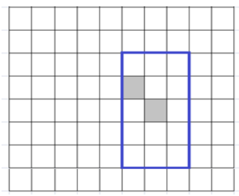


Рисунок 2

Ответ: 300 прямоугольников

Решение: Заметим, что прямоугольник определяется выбором вертикальных и горизонтальных линий, его ограничивающих. Для нижней линии 5 вариантов, для верхней - 4. Для левой 5 вариантов и для правой - 3. Каждая из этих линий может быть выбрана независимо, поэтому количество прямоугольников равно произведению
5×4×3×5=300.

Задача 4. (8 баллов) Метатель ножей метает в мишень ножи и вилки с четырьмя зубцами. Всего он бросил 17 предметов, оставивших в мишени 50 дырок. Сколько у метателя ножей и сколько вилок, если никакие два предмета не попали в одно и то же место?

Ответ: 11 вилок и 6 ножей

Решение: Если бы все предметы были ножами, то на мишени осталось 17 дырок. Их же на 50 - 17 = 33 дырки больше. “Лишние” дырки добавляют вилки - по три на каждую. Значит, вилок было 33:3 = 11, а ножей 17 - 11 = 6.

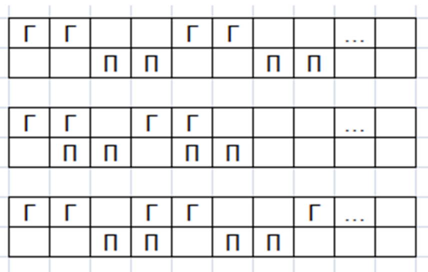
Задача 5. (13 баллов) В верном арифметическом равенстве в левой части одинаковые цифры заменили одинаковыми буквами, а разные - разными. Получилось: (М + А-Т-Н) × (К + А + Т) = 2022
Восстановите исходное равенство. Укажите все возможные варианты.

Ответ: (8 + 329)x(1 + 3 + 2) или (9 + 328)x(1 + 3 + 2)

Решение: Разложим на простые множители 2022 = 2x3x337. Поскольку в одной скобке сумма трёх однозначных чисел, то этот множитель либо однозначное число, либо двузначное. Но в разложении на множители числа 2022 получить двузначный множитель нельзя, поэтому К + А + Т - однозначное число. Значит, это либо 3, либо 6 (2 получить не получится, так как минимальная сумма трёх однозначных чисел равна 3 (=0+1+2) Но если это 3, то второй множитель 674, который получается в результате суммы трехзначного числа и однозначного. Это значит, что в любом случае А=6, но такой цифры среди КАТ нет. Значит, К+А+Т=6. Тогда во второй скобке в сумме получается 337 и А = 3. Отсюда Т=2 (так как при суммировании с однозначным числом нельзя получит в десятках цифру, отличающуюся от исходной более, чем на 1), К = 1
Таким образом получаем два варианта:
(8 + 329)x(1 + 3 + 2) или (9 + 328)x(1 + 3 + 2)

Задача 6. (12 баллов) На кошачьей выставке в ряд сидит 2022 кота. Каждый кот либо пушистый, либо голубоглазый, либо и пушистый, и голубоглазый. Известно, что если пушистый кот сидит рядом с пушистым котом, то он лжет. Если голубоглазый сидит рядом с голубоглазым, то он лжет. Во всех других случаях кот говорит правду. Каждый пушистый заявил “Рядом со мной два пушистых кота”. Каждый голубоглазый заявил “Рядом со мной два голубоглазых кота. (Если кот был и пушистым, и голубоглазым, то он сказал два утверждения). Какое максимально утверждений могло быть сказано или, что-то же самое - какое наибольшее количество пушистых голубоглазых котов могло сидеть на выставке?

Ответ: 674



Решение: Заметим, что пушистые коты должны сидеть парами. В противном случае они будут высказывать истинное утверждение, хотя должны лгать, или лгать, хотя должны говорить правду. Аналогично для голубоглазых котов. В свете этого коты распределены по тройкам (один голубоглазый и не пушистый, один пушистый и не голубоглазый и один и пушистый, и голубоглазый) и четверкам (два пушистых не голубоглазых и два голубоглазых и не пушистых) с двойками (либо пара пушистых, либо пара голубоглазых) - между тройками

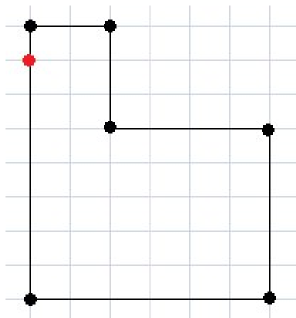
.

Пушистого голубоглазого (или дополнительного утверждение) нам дает только тройка. Причём между любыми двумя одновременно пушистыми и голубоглазыми должно сидеть как минимум два кота, которые таковыми не являются. Соответственно, чем больше троек, тем больше утверждений. 2022 делится на 3 (=674), поэтому максимальное количество таких котов = 674

P.S. Заметим, что не любое количество от 0 до 674 можно реализовать. Например, 2 возможно, а 1 нет. Собственно, любое нечетное число нереализуемо

Задача 7. (10 баллов) Дон Кихот утром в понедельник выехал из своего замка и отправился в путешествие. В понедельник он проехал к вечеру ровно 10 км по прямой, во вторник он повернул на 90º в какую-то сторону и проехал 20 км по прямой, в среду снова повернул на 90º и проехал 30 км. И так далее: каждый день проезжая на 10 км больше, чем в предыдущий день. На каком наименьшем расстоянии от своего замка он мог оказаться в воскресенье вечером?

Ответ: 0 км



Решение: Это задача на конструктив. Поскольку можно предъявить пример путешествия, когда Дон Кихот возвращается в исходную точку, то никакого доказательства минимальности не требуется. 0 – это минимально возможное расстояние. На рисунке сторона клетки равна 10км и семь отрезков, поскольку с понедельника по воскресенье прошло семь дней.

Задача 8. (11 баллов) В ряд стоят 5 коробочек, в каждой из которых есть хотя бы один орех. Будем говорить, что орехи соседние, если они лежат в одной и той же или в соседних коробочках. Известно, что у каждого ореха либо ровно 5, либо ровно 10 соседних орехов. Сколько всего орехов может быть в коробочках? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 17 орехов.

Решение: Всего коробочек 5, обозначим их буквами А, Б, В, Г, Д в том порядке, как они расположены в ряду.
Исходя из определения соседних орехов следует, что суммарное количество орехов, лежащих в А и Б равно 6 или 11. Аналогично в сумме в А, Б и В тоже 6 или 11.
Заметим, что поскольку по условию в каждой коробочке лежит хотя бы один орех, то эти две суммы не могут быть равны.
Следовательно, А+Б=6, А+Б+В=11.
Из тех же соображений
Г+Д=6, В+Г+Д=11.
Сложив все эти четыре равенства, получаем 2(А+Б+В+Г+Д)=34. Откуда общее количество орехов, лежащих в коробочках, равно 17.

Задача 9. (15 баллов) Из костяшек домино сложили рамку, как на рисунке по правилам домино, а именно: рядом расположены клетки с одинаковым количеством точек. Какое минимальное общее количество точек может быть в сумме на всех использованных доминошках, если дубли не использовали? (См. рис. 3)

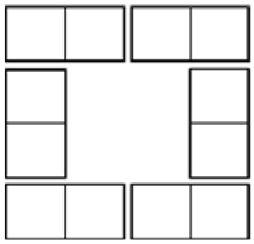
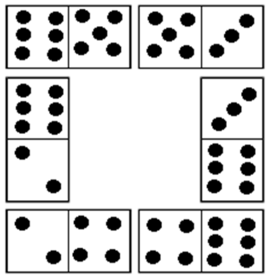


Рисунок 3

Ответ: 20

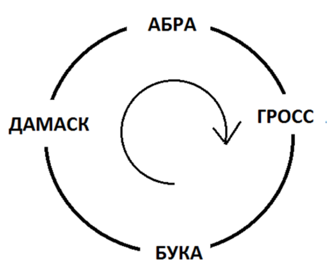
Решение: Заметим, что, поскольку доминошки выкладывались по правилам домино, то каждое число точек участвовало четное число раз. Выпишем доминошки (не дубли) с минимальной суммой точек: 0-1, 0-2, 0-3, 1-2, 1-3, 0-4, 2-3, 1-4. Заметим, что доминошек с числами не больше 3 всего 6, но если использовать только их, то 0 будет три, а их должно быть четное количество. Значит должна быть доминошка хотя бы 4-.... Но тогда четверки как минимум две. Рассмотрим доминошки с минимальной четной суммой 1+2+3+3+4+5=18. Докажем, что доминошек с суммой точек 5 хотя бы две. Действительно, если нет доминошки 2-3, то обязательно есть доминошки 0-1, 0-2, 0-3, 1-2 (или 1-3), 0-4, 1-4, но тогда единиц три и выложить рамку не получится. Значит, выложить рамку с суммой 18 при таких условиях невозможно. А так как она должна быть четна, то сумма хотя бы 20. Для 20 можно построить пример.

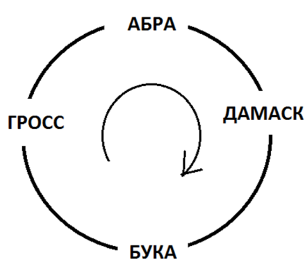


Задача 10. (9 баллов) Трамвай ходит по круговому маршруту, на котором только 4 остановки — Альфа, Бета, Гамма, Дельта. Однажды путешественник ехал в трамвае с местными жителями и спросил, когда будет станция Альфа. Ему с готовностью ответили: Баба Маня: «Та остановка, на которой ты зашёл, — первая после Альфы». Баба Валя: «Да нет, ты всё путаешь! Альфа была после Гаммы. А зашёл он на Бете». Баба Аня: «Вы обе неправы! Гамма и Дельта — соседние остановки!»
Баба Галя: «Как раз на Альфе-то он и вошёл!». Как потом выяснилось, все утверждения бабушек про остановки и путешественника оказались неверными. Определите, в каком порядке идут остановки на маршруте и на какой остановке вошёл путешественник?

Ответ: Остановки по круговому маршруту: Альфа - Гамма - Бета - Дельта, путешественник вошел на Дельте.

Решение: Поскольку все утверждения бабушек про путешественника и остановки неверны, то он зашел в трамвай не на Бете и не на Альфе.
Поскольку Гамма и Дельта не соседние, то они “разбавлены” Бетой и Альфой. Значит, с точностью до отражения остановки расположены так:





Поскольку утверждение, что Альфа после гаммы неверно, то вариант справа отпадает. Но тогда путешественник зашел не на Гамме. Значит, он зашел на Дельте